Σ El Estudiante

Mira el vídeo

NÚMEROS · LÓGICA · 4.º ESO · BACHILLERATO

$\sqrt{2}$ es irracional

Un triángulo de catetos 1 y 1 bastó para romper la filosofía de los pitagóricos. Aquí tienes la demostración completa de que $\sqrt{2}$ no es una fracción, el lema que la sostiene y por qué el mismo truco no funciona con $\sqrt{4}$.

1 Un número que no debía existir

Para los pitagóricos «todo es número»: cualquier magnitud se podía expresar con enteros o razones entre ellos. Pero en el triángulo rectángulo de catetos 1 y 1, el teorema de Pitágoras da

$$h^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \quad \Longrightarrow \quad h = \sqrt{2} = 1{,}41421356237\ldots$$

HISTORIA · LA LEYENDA DE HIPASO

Cuenta la tradición que Hipaso de Metaponto reveló el secreto de los inconmensurables y murió en el mar como castigo. Las fuentes son muy posteriores y probablemente es una leyenda, pero refleja lo inquietante del descubrimiento.

2 Qué significa «racional»

DEFINICIÓN 2.1 · NÚMERO RACIONAL

Un número real x es **racional** si existen enteros a, b con $b \neq 0$ tales que $x = \dfrac{a}{b}$. Si no existen, x es **irracional**.

DEFINICIÓN 2.2 · FRACCIÓN IRREDUCIBLE

La fracción $\frac{a}{b}$ es irreducible si a y b son **primos entre sí**: su único divisor común positivo es 1.

NOTA *Toda fracción puede simplificarse hasta ser irreducible dividiendo numerador y denominador entre su máximo común divisor. Por eso podemos exigirlo «gratis» en la hipótesis.*

3 La reducción al absurdo

Para demostrar una afirmación P, suponemos que es falsa y razonamos con pasos correctos. Si llegamos a una contradicción, algo que es a la vez cierto y falso, la única pieza que puede fallar es la suposición inicial. Luego P es verdadera.

IDEA CLAVE

Con pasos lógicos válidos, de una premisa verdadera nunca se deduce algo falso. Si aparece un absurdo, la premisa era falsa.

4 Si n^2 es par, n es par

TEOREMA 4.1 · LEMA

Sea n un número entero. Si n^2 es par, entonces n es par.

DEMOSTRACIÓN

Lo probamos por el contrarrecíproco: si n es impar, n^2 es impar. En efecto, si $n = 2k + 1$,

$$n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2\,(2k^2 + 2k) + 1,$$

que es impar. Así que si n^2 es par, n no puede ser impar.

■

5 La demostración

TEOREMA 5.1

$\sqrt{2}$ es irracional.

DEMOSTRACIÓN

1. **Hipótesis.** Supongamos que $\sqrt{2}$ es racional: $\sqrt{2} = \dfrac{a}{b}$, con a, b enteros, $b \neq 0$ y $\frac{a}{b}$ irreducible.
2. Elevando al cuadrado, $2 = \dfrac{a^2}{b^2}$, es decir, $a^2 = 2b^2$.
3. Entonces a^2 es par (es 2 por algo) y, por el lema, a **es par**: $a = 2k$.
4. Sustituyendo, $2b^2 = (2k)^2 = 4k^2$, luego $b^2 = 2k^2$.
5. Por el mismo razonamiento, b^2 es par y b **es par**.
6. **Contradicción.** a y b son pares, así que 2 los divide a ambos: la fracción no era irreducible.

Como todos los pasos son correctos, la hipótesis es falsa: $\sqrt{2}$ no es racional. ■

> NOTA *En la web tienes un laboratorio interactivo para intentar escribir $\sqrt{2}$ como fracción y comprobar que nunca se consigue exactamente.*

6 ¿Y por qué no falla con $\sqrt{4}$?

Una buena forma de entender una demostración es ver dónde se rompe. Si intentamos lo mismo con $\sqrt{4} = \frac{a}{b}$:

$$a^2 = 4b^2 \;\Rightarrow\; a = 2k \;\Rightarrow\; 4k^2 = 4b^2 \;\Rightarrow\; k^2 = b^2.$$

No llegamos a que b sea par: el 4 se cancela entero y la contradicción no aparece. Y no podía aparecer, porque $\sqrt{4} = \frac{2}{1}$. En general se puede probar:

TEOREMA 6.1 · GENERALIZACIÓN

Si n es un número natural, $\sqrt{n}$ es entero (cuando n es un cuadrado perfecto) o es irracional. Nunca es una fracción no entera.

7 Para practicar

1. Demuestra que $\sqrt{3}$ es irracional.
2. Demuestra por reducción al absurdo que hay infinitos números primos (Euclides).
3. Demuestra que $\log_2 3$ es irracional.
4. Si q es racional y $q \neq 0$, ¿puede ser racional $q\sqrt{2}$?

8 Soluciones

1. Lema: si $3 \mid n^2$, entonces $3 \mid n$, porque si $n = 3k \pm 1$, $n^2 = 3(3k^2 \pm 2k) + 1$. Con $\sqrt{3} = \frac{a}{b}$ irreducible: $a^2 = 3b^2$, luego $a = 3k$; $3b^2 = 9k^2$, luego $b^2 = 3k^2$ y $3 \mid b$. Contradicción.
2. Si solo hubiera $p_1, \ldots, p_k$, el número $N = p_1 p_2 \cdots p_k + 1$ deja resto 1 al dividirlo entre cada p_i. Pero $N > 1$ tiene algún divisor primo, que tendría que ser uno de los p_i. Contradicción.
3. Si $\log_2 3 = \frac{a}{b}$ con $a, b > 0$, entonces $2^{a/b} = 3$, es decir, $2^a = 3^b$. El primer miembro es par y el segundo impar. Contradicción.
4. No. Si $q\sqrt{2} = r$ fuera racional, $\sqrt{2} = \frac{r}{q}$ sería racional (cociente de racionales con $q \neq 0$). Contradicción.