Mira el vídeo

CÁLCULO · 2.º BACHILLERATO · 1.º STEM

La integral definida

Te enseñaron que integrar es «lo contrario de derivar». Es un atajo, no la definición. La integral definida es el límite de una suma de rectángulos; que se pueda calcular con primitivas es un teorema, y de los más bonitos de las matemáticas.

1 El problema: áreas con curvas

El área de un polígono es fácil: se divide en triángulos. Con un contorno curvo, como un círculo o una parábola, esa técnica no basta. La idea griega fue aproximar la figura curva con figuras que sí sabemos medir, cada vez más ajustadas, y ver hacia dónde se acercan.

HISTORIA · ARQUÍMEDES, SIGLO III A. C.

Con su *método de agotamiento*, Arquímedes demostró que el área de un segmento de parábola es exactamente $\frac{4}{3}$ del área del triángulo inscrito en él, «agotando» el hueco con triángulos cada vez más pequeños. Es, en esencia, un paso al límite, dieciocho siglos antes del cálculo.

2 Sumar rectángulos

Queremos el área bajo $y = f(x) \geq 0$ entre $x = a$ y $x = b$. Dividimos $[a, b]$ en n subintervalos de la misma longitud

$$\Delta x = \frac{b - a}{n}, \qquad x_i = a + i\,\Delta x \quad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

Sobre cada subintervalo levantamos un rectángulo de base Δx y altura $f(x_i)$, el valor de la función en su extremo derecho. Sumando sus áreas:

DEFINICIÓN 2.1 · SUMA DE RIEMANN

$$S_n = f(x_1)\,\Delta x + f(x_2)\,\Delta x + \cdots + f(x_n)\,\Delta x = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x.$$

NOTA *El subíndice i recorre los rectángulos uno a uno, del 1 al n. El sumatorio Σ es solo una forma compacta de escribir esa suma larga.*

NOTA *En la web tienes un laboratorio interactivo para aumentar el número de rectángulos y ver cómo la suma se acerca al área.*

3 El paso al límite

Al aumentar n, cada rectángulo se estrecha y el error se reduce. El área exacta aparece cuando tomamos el límite:

DEFINICIÓN 3.1 · INTEGRAL DEFINIDA

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x.$$

TEOREMA 3.2 · EXISTENCIA

Si f es continua en $[a, b]$, el límite existe y además no depende del punto de cada subintervalo que usemos para la altura (extremo derecho, izquierdo o cualquier otro).

Suma de Riemann		Notación de Leibniz
Σ (suma)	$\rightarrow$	$\int$, una S alargada de *summa*
$f(x_i)$, altura	$\rightarrow$	$f(x)$, el integrando
Δx, base	$\rightarrow$	dx, base infinitesimal
de $i = 1$ a n	$\rightarrow$	de a a b, los límites de integración

4 Calcular una integral solo con la definición

EJEMPLO · $\int_0^1 x^2\,dx$ COMO LÍMITE

Con $a=0$, $b=1$: $\Delta x = \frac{1}{n}$ y $x_i = \frac{i}{n}$. Entonces

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{i}{n}\right)^2 \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.$$

Y al tomar el límite, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$.

n	4	10	100	1000	∞
S_n	0,4688	0,3850	0,3384	0,3338	$\frac{1}{3}$

NOTA *Hemos usado $1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, que se demuestra por inducción.*

5 El signo de la integral

Si f es negativa, las alturas $f(x_i)$ son negativas y la integral también. Si $f \le 0$ en $[a,b]$, el área es $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$. Si f cambia de signo, hay que separar los tramos; en general,

$$\text{Área} = \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Por ejemplo, $\int_0^{2\pi} \sin x\,dx = 0$, porque las dos «jorobas» se cancelan, pero el área encerrada es 4.

6 De un número a una función

Si dejamos fijo el punto de partida a y movemos el final, el área deja de ser un número y pasa a ser una función:

DEFINICIÓN 6.1 · FUNCIÓN INTEGRAL

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

NOTA *La variable de integración es* muda*: la llamamos t para no confundirla con el extremo x. Observa que $F(a) = 0$.*

7 El teorema que lo une todo

TEOREMA 7.1 · TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Si f es continua en $[a, b]$, la función $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es derivable y

$$F'(x) = f(x).$$

DEMOSTRACIÓN

El cociente incremental es el área de una tira fina dividida entre su anchura:

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt.$$

Por el teorema del valor medio integral, existe c_h entre x y $x+h$ con $\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(c_h)\,h$. Así que el cociente vale $f(c_h)$. Cuando $h \to 0$, $c_h \to x$ y, por ser f continua, $f(c_h) \to f(x)$.

■

TEOREMA 7.2 · REGLA DE BARROW

Si f es continua en $[a, b]$ y G es una primitiva de f ($G' = f$), entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a).$$

DEMOSTRACIÓN

F y G tienen la misma derivada, luego difieren en una constante: $F = G + C$. Como $F(a) = 0$, $C = -G(a)$ y, evaluando en b, $\int_a^b f = F(b) = G(b) - G(a)$.

■

IDEA CLAVE

Volvemos al ejemplo: $\int_0^1 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$, el mismo número que nos dio el límite. Las primitivas no definen la integral: son el **atajo** que el teorema fundamental nos regala para calcularla.

8 Para practicar

1. Calcula $\int_0^2 x\,dx$ con sumas de Riemann y comprueba el resultado con el área de un triángulo.
2. Calcula el área encerrada entre $y = x^2 - 1$ y el eje x.
3. Si $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$, calcula $F'(x)$ y $F'(0)$.
4. Explica por qué $\int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0$ sin hacer cuentas.

9 Soluciones

1. $\Delta x = \frac{2}{n}$, $x_i = \frac{2i}{n}$: $S_n = \frac{4}{n^2}\sum i = \frac{4}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} = \frac{2(n+1)}{n} \to 2$. El triángulo de base 2 y altura 2 tiene área 2. ✓
2. Corta al eje en ± 1 y es negativa entre ellos: $\int_{-1}^{1}(x^2-1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{-1}^{1} = -\frac{4}{3}$. El área es $\frac{4}{3}$.
3. Por el teorema fundamental, $F'(x) = e^{-x^2}$ y $F'(0) = 1$, aunque e^{-t^2} no tenga una primitiva elemental.
4. x^3 es impar: el área sobre $[0,1]$ y la de $[-1,0]$ son iguales con signos opuestos y se cancelan.