Mira el vídeo

ÁLGEBRA · 4.º ESO · BACHILLERATO

La fórmula cuadrática

Seguro que la conoces de memoria. En estos apuntes vamos a deducirla paso a paso, completando el cuadrado, y a ver qué más nos cuenta: el discriminante, las relaciones de Cardano-Vieta y el cuadrado «de verdad» con el que al-Juarismi resolvía ecuaciones hace doce siglos.

1 El punto de partida

DEFINICIÓN 1.1 · ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

Es toda ecuación que puede escribirse en la forma

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0.$$

NOTA *La condición $a \neq 0$ no es un tecnicismo: si $a = 0$, el término x^2 desaparece y la ecuación es de primer grado. Toda la deducción usa que podemos dividir entre a.*

2 Dividir entre a

Dividimos los dos miembros entre a y pasamos el término independiente al otro lado:

$$x^2 + \frac{b}{a}\,x = -\frac{c}{a}.$$

El objetivo de todo lo que sigue es que la x aparezca una sola vez: así podremos despejarla.

3 Completar el cuadrado

Recordemos la identidad notable del cuadrado de una suma:

$$(p+q)^2 = p^2 + 2pq + q^2.$$

En el primer miembro ya tenemos «el cuadrado del primero», x^2, y algo que puede hacer de «doble del primero por el segundo». Hacemos la correspondencia:

$$p = x, \qquad 2pq = \frac{b}{a}\,x \implies q = \frac{b}{2a}.$$

Solo falta q^2. Lo sumamos en los dos miembros para no alterar la igualdad:

$$x^2 + \frac{b}{a}\,x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}.$$

A la izquierda hay un cuadrado perfecto; a la derecha, reducimos a común denominador $4a^2$:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

DEFINICIÓN 3.1 · DISCRIMINANTE

El número $\Delta = b^2 - 4ac$ se llama **discriminante** de la ecuación.

IDEA CLAVE

Completar el cuadrado convierte una expresión con dos apariciones de x en un único cuadrado $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$. Es el corazón de la demostración.

4 La raíz cuadrada, con cuidado

El primer miembro es un cuadrado, así que es ≥ 0. Si $\Delta < 0$, el segundo miembro es negativo y la ecuación **no tiene soluciones reales**. Supongamos, pues, $\Delta \geq 0$ y tomemos raíces.

TEOREMA 4.1 · PROPIEDAD

Para todo número real t, $\quad \sqrt{t^2} = |t|$.

El símbolo $\sqrt{\ }$ denota la raíz *principal*, que por definición nunca es negativa. Por eso

$\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3 = |-3|$, y no -3. Aplicándolo a los dos miembros:

$$\left| x + \frac{b}{2a} \right| = \frac{\sqrt{\Delta}}{\sqrt{4a^2}} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2|a|}.$$

5 Quitar el valor absoluto: nace el $\pm$

Si $k \geq 0$, la igualdad $|t| = k$ equivale a $t = k$ o $t = -k$. Por tanto

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2|a|} \quad \Longrightarrow \quad x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2|a|}.$$

6 El signo de a

Si $a > 0$, entonces $|a| = a$ y juntamos en una sola fracción: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Si $a < 0$, entonces $|a| = -a$ y el signo se invierte: $x = \dfrac{-b \mp \sqrt{\Delta}}{2a}$. Pero «$\mp$» y «$\pm$» describen el mismo par de números, así que el resultado es idéntico.

TEOREMA 6.1 · FÓRMULA CUADRÁTICA

Si $a \neq 0$ y $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$, las soluciones reales de $ax^2 + bx + c = 0$ son

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

7 Lo que cuenta el discriminante

Discriminante	Soluciones reales	La parábola $y = ax^2 + bx + c$…
$\Delta > 0$	Dos, distintas	corta al eje x en dos puntos
$\Delta = 0$	Una (doble): $x = -\frac{b}{2a}$	toca al eje en su vértice
$\Delta < 0$	Ninguna	no llega a tocar el eje

> NOTA *En la web tienes un laboratorio interactivo para mover a, b y c y ver cómo cambian la parábola y sus cortes con el eje.*

8 Suma y producto de las soluciones

TEOREMA 8.1 · RELACIONES DE CARDANO-VIETA

Si x_1, x_2 son las soluciones de $ax^2 + bx + c = 0$, entonces

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

DEMOSTRACIÓN

Al sumar, las raíces se cancelan: $x_1 + x_2 = \dfrac{-2b}{2a} = -\dfrac{b}{a}$. Al multiplicar aparece una suma por diferencia:

$$x_1 x_2 = \frac{(-b)^2 - \left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4a^2} = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

■

9 Un ejemplo completo

EJEMPLO · RESOLVER $2x^2 - 3x - 2 = 0$

Aquí $a = 2$, $b = -3$, $c = -2$, así que $\Delta = 9 + 16 = 25$ y

$$x = \frac{3 \pm 5}{4} \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 2, \qquad x_2 = -\tfrac{1}{2}.$$

Comprobación con Cardano-Vieta: $x_1 + x_2 = \frac{3}{2} = -\frac{b}{a}$ y $x_1 x_2 = -1 = \frac{c}{a}$. ✓

HISTORIA · AL-JUARISMI, SIGLO IX

En su tratado de álgebra, al-Juarismi resuelve $x^2 + 10x = 39$ completando un cuadrado *geométrico*: un cuadrado de lado x y dos rectángulos de $x \times 5$ forman casi un cuadrado de lado $x+5$; le falta una esquina de $5 \times 5 = 25$. Añadiéndola, $(x+5)^2 = 39 + 25 = 64$, luego $x + 5 = 8$ y $x = 3$. Es exactamente nuestro paso 2, dibujado.

10 Para practicar

1. Resuelve $x^2 - 6x + 5 = 0$ completando el cuadrado, sin usar la fórmula.
2. ¿Para qué valores de k tiene $x^2 + kx + 9 = 0$ una única solución (doble)?
3. Demuestra que si a y c tienen signos opuestos, la ecuación tiene siempre dos soluciones reales distintas.
4. ¿Es cierto que $\sqrt{x^2} = x$ para todo x? Da un contraejemplo.

11 Soluciones

1. $x^2 - 6x = -5 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 = 4 \Rightarrow (x-3)^2 = 4$, así que $x - 3 = \pm 2$: $x = 5$ o $x = 1$.
2. Hace falta $\Delta = k^2 - 36 = 0$, es decir, $k = 6$ o $k = -6$.
3. Si $ac < 0$, entonces $-4ac > 0$ y $\Delta = b^2 - 4ac \geq -4ac > 0$.
4. No: con $x = -2$, $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2 \neq -2$. Lo correcto es $\sqrt{x^2} = |x|$.